2
К вопросу о моделировании демографических циклов и о выходе из мальтузианской ловушки*

Ю. А. Гущина, С. Ю. Малков

В работе предложена математическая модель, описывающая демографические циклы в аграрных обществах и выход из мальтузианской ловушки. Модель учитывает социальную структуру общества и позволяет определять условия экономико-демографического равновесия.

Ключевые слова: *аграрное общество, социальная структура, демографические циклы, мальтузианская ловушка, экономико-демографическое равновесие.*

Вопросам моделирования демографических циклов в аграрных обществах и выходу из мальтузианской ловушки посвящено большое количество работ (см., например: Artzrouni, Komlos 1985; Komlos, Artzrouni 1990; Kögel, Prskawetz 2001; Нефедов 2002; 2003; Нефедов, Турчин 2006; Коротаев и др. 2007 и др.), однако в предлагаемых моделях общество в основном рассматривается агрегированно, без деления на социальные слои. Между тем представляется, что для более детального анализа как самой мальтузианской ловушки, так и процессов выхода из нее необходим учет социальной структуры общества. В ряде работ (Малков и др. 2002; Турчин 2007; Малков 2009; Гринин и др. 2008; Гринин и др. 2009) были предложены базовые математические модели для описания демографической динамики в аграрных обществах с учетом их социальной структуры. Настоящая работа продолжает эти исследования.

1. Описание математической модели

В математической модели рассматривается социальная система, основными составляющими которой являются, с одной стороны, сельскохозяйственные производители – крестьяне, а с другой стороны, военно-административная элита и землевладельцы, объединенные в одну группу, называемую далее «государство». Произведенный продукт расходуется на потребление как непосредственно (продукты питания), так и в преобразованной форме (ремесленная продукция, услуги и т. п.). Государство живет за счет налогов, при этом оно может расходовать определенные средства

* Работа поддержана РФФИ (проект № 13-06-00576).

на стимулирование и повышение эффективности сельскохозяйственного производства (что сказывается на появлении зависимости производительности крестьян от экономического состояния государства), а также тратит определенные средства на удержание производителей в повиновении и на обеспечение внешней безопасности (охрана границ государства от агрессии соседей).

Считается, что в рассматриваемой социальной системе налоги земледельцев составляют фиксированную часть урожая, а производительность труда постоянна. Считается также, что система замкнута, то есть такими явлениями, как иммиграция и эмиграция, изменение границ, войны с соседями, можно пренебречь на отрезке времени, на котором ведется моделирование (либо учесть с помощью экзогенно задаваемых параметров).

Базовая модель социально-экономической динамики общества, разделенного на социальные группы, приведена в работе С. Ю. Малкова (2009). С учетом изложенных выше допущений эта модель может быть преобразована в модель аграрного общества, основными акторами которой являются государство (военно-административная элита и землевладельцы) и земледельцы (крестьяне):

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \beta\gamma R(N)N - \alpha_X X - C(N, \dfrac{Y}{Y_0}) \\ \dfrac{dY}{dt} = \gamma R(N) - \alpha_Y Y - \beta\gamma R(N) \\ \dfrac{dN}{dt} = rN\,(1 - \dfrac{Y_0}{Y}) \end{cases}, \qquad (1)$$

$$R(N) = \begin{cases} R_0, \quad N < N_0 - \textit{область I} \\ R_0 \dfrac{N_0}{N}, \; N \ge N_0 - \textit{область II} \end{cases}, \qquad (2)$$

где X – материальные накопления государства (элиты); Y – средние материальные накопления земледельцев; β – часть урожая, идущая на уплату налогов; $R(N)$ – площадь земли, обрабатываемой одним крестьянином; C – функция затрат государства на управление (на обеспечение повиновения крестьян); N – численность крестьян в рассматриваемом регионе; $\alpha_X X$, $\alpha_Y Y$ – функции потребления государства и крестьян, соответственно показывающие, какое количество продукта потребляется ими в единицу времени (α_X, α_Y – коэффициенты); Y_0 – уровень выживания (при этом уровне прекращается рост населения); r – демографический коэффициент, характеризующий скорость роста населения в ситуации, когда ресурсные ограничения отсутствуют; γ – производительность труда; N_0 – численность населения, при которой обрабатывается вся пригодная земля; R_0 – максимальная площадь земли, которую способен обработать один крестьянин.

Первое уравнение системы (1) отражает динамику изменения накоплений землевладельцев (государства): доходы – налоговые поступления, расходы – затраты на потребление и на управление. Второе уравнение системы (1) отражает динамику изменения накоплений земледельцев: доходы – выращенный урожай на одного человека, расходы – затраты на потребление и налоги. Третье уравнение системы (1) отражает демографическую динамику земледельцев в зависимости от их благосостояния (уменьшение благосостояния отрицательно влияет на прирост населения и при снижении благосотояния до величины Y_0 демографический рост прекращается). В модели расчет численности элиты не производится, поскольку считается, что она многократно меньше численности земледельцев и ее вкладом в демографические показатели можно пренебречь.

Уравнение (2) отражает ограниченность земельных ресурсов. Если при низкой плотности населения (область I) дефицита земель нет, то при высокой плотности населения (область II) сельскохозяйственных угодий не хватает и крестьянские наделы уменьшаются обратно пропорционально увеличению N.

Модель (1)–(2) использовалась для исследования состояний равновесия и анализа динамических состояний системы.

2. Локальное экономическое равновесие

Рассмотрим сначала ситуацию установления *экономического* равновесия в системе. Предположим, что при $Y \geq Y_0$ скорость демографических изменений значительно ниже скорости изменений накоплений X и Y. Следовательно, динамику системы можно рассмотреть как быстрое установление равновесных значений X и Y при постоянном N, рассматриваемом в качестве параметра, и медленном изменении N к своему равновесному значению, с соответствующим дрейфом X и Y.

Используя теорему Тихонова, исследуем упрощенную систему (3), описывающую динамику «быстрых» переменных X, Y при заданном параметре численности населения $N = \text{const}$.

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \beta\gamma R(N)N - \alpha_X X - C(N, \dfrac{Y}{Y_0}) \\ \dfrac{dY}{dt} = \gamma(1-\beta)R(N) - \alpha_Y Y \end{cases}. \tag{1a}$$

Затраты на управление $C = C(N, Y/Y_0)$ можно представить в виде:

$$C(N, \frac{Y}{Y_0}) = \frac{cNY_0}{Y}. \tag{3}$$

Это отражает тот факт, что при обнищании населения растет социальная напряженность и, как следствие, возрастают расходы, необходимые для поддержания порядка и управляемости.

На Рис. 1 и 2 отражена динамика изменения X и Y в соответствии с (3) для различных начальных данных. Видно, что при заданных значениях параметров система стремится к устойчивому равновесию.

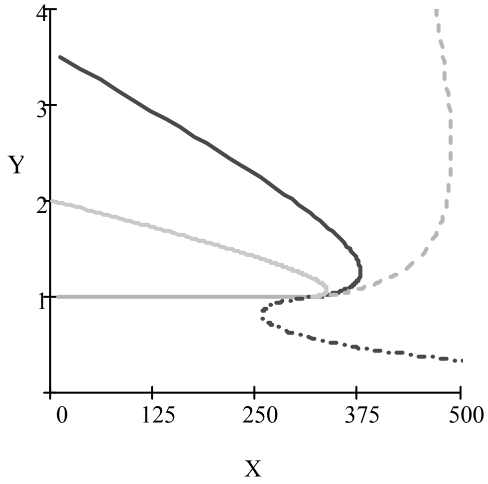


Рис. 1. Фазовые траектории системы (3) в координатах (*Y, X*)

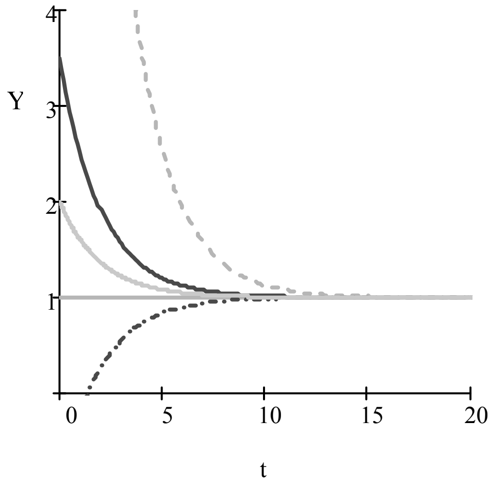


Рис. 2. Изменение величины средних материальных накоплений земледельцев *Y(t)* (для различных начальных значений)

Найдем точки равновесия системы (1а). Приравняв правые части уравнений к нулю, получим для равновесных значений X^*, Y^*:

$$X^* = \frac{N}{\alpha_X}\left(\gamma\beta R(N) - \frac{cY_0}{Y^*}\right), \tag{4}$$

$$X^* = \frac{N}{\alpha_X}\left(\gamma\beta R(N) - \frac{cY_0\alpha_Y}{\gamma(1-\beta)R(N)}\right), \tag{5}$$

$$Y^* = \frac{\gamma(1-\beta)R(N)}{\alpha_Y}\,. \tag{6}$$

Собственные значения якобиана линеаризованной в окрестности (X^*, Y^*) системы равны соответственно $\lambda_1 = -\alpha_X$, $\lambda_2 = -\alpha_Y$, то есть точка равновесия устойчива. Запишем отдельно выражения для X^*, Y^* в областях I ($N < N_0$) и II ($N \geq N_0$) соответственно.

В области I (при $N < N_0$) имеем:

$$X^* = \frac{N}{\alpha_X}\left(\gamma\beta R_0 - \frac{cY_0\alpha_Y}{\gamma(1-\beta)R_0}\right), \tag{5a}$$

$$Y^* = \frac{\gamma(1-\beta)R_0}{\alpha_Y}\,. \tag{6a}$$

В области II (при $N \geq N_0$) имеем:

$$X^* = \frac{1}{\alpha_X}\left(\gamma\beta R_0 N_0 - \frac{cY_0\alpha_Y}{\gamma(1-\beta)R_0 N_0}N^2\right), \tag{5b}$$

$$Y^* = \frac{\gamma(1-\beta)R_0}{\alpha_Y}\frac{N_0}{N}\,. \tag{6b}$$

Из требования $X > 0$ следуют условия существования состояния равновесия системы (1a):

$$\frac{\beta(1-\beta)}{cY_0\alpha_Y}\big(\gamma R(N)\big)^2 > 1 \tag{7}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\beta(1-\beta)(\gamma R_0)^2}{cY_0\alpha_Y} > 1 \quad \text{при } N < N_0 \\ \dfrac{\beta(1-\beta)}{cY_0\alpha_Y}\left(\gamma R_0\dfrac{N_0}{N}\right)^2 > 1 \quad \text{при } N > N_0 \end{cases}. \tag{7a, b}$$

Логично считать, что государство будет стремиться установить такой уровень налогов β, при котором величина $X^*(\beta)$ будет максимальной. Оптимальная (с точки зрения государства) величина β_{opt} находится из условия:

$$dX^*/d\beta = 0, \text{ откуда } \beta_{opt} = 1 - \frac{\sqrt{cY_0\alpha_Y}}{\gamma R(N)}\,. \tag{8}$$

При таком уровне налогов величины X^*, Y^* принимают значения:

$$\begin{aligned} X^*_{opt} &= \frac{N}{\alpha_X}\left(\gamma R(N) - 2\sqrt{cY_0\alpha_Y}\right) \\ Y^*_{opt} &= \sqrt{\frac{cY_0}{\alpha_Y}} \end{aligned} . \tag{9}$$

Условие устойчивости существования государства в терминах модели может быть записано как $X^* > 0$. Откуда на основании (7) и (9) можно утверждать, что государство легче образуется там, где:

– меньше затраты на управление ($c \to 0$);

– благоприятнее условия для сельскохозяйственного производства ($\gamma R_0 \to \infty$);

– ниже потребности населения (Y_0, $\alpha_Y \to 0$).

Из уравнения (5b) можно найти критическое значение численности населения N_C, при котором $X^* = 0$ (социальная система дестабилизируется):

$$N_C = \gamma R_0 N_0 \sqrt{\frac{\beta(1-\beta)}{cY_0\alpha_Y}} . \tag{10}$$

3. Общее экономико-демографическое равновесие

Учтем теперь, что численность населения N непостоянна и точка (X^*, Y^*) дрейфует к глобальному равновесному положению (X^{**}, Y^{**}, N^{**}) (то есть к точке устойчивого равновесия системы (1)). Из третьего уравнения системы (1) получим дополнительное условие для координат точки равновесия: $Y^{**} = Y_0$.

При $Y_0 > \gamma(1 - \beta)R_0 /\alpha_Y$ точка равновесия отсутствует, поскольку при этом условии благосостояние крестьян оказывается ниже точки физического выживания и система стабильной быть не может.

При $Y_0 < \gamma(1 - \beta)R_0 /\alpha_Y$ ситуация следующая: если $N < N_0$ (то есть мы находимся в области I), то $dN/dt > 0$, численность населения непрерывно растет и система попадает в область II. В области II ($N \geq N_0$) из (5b, 6b) получаем:

$$X^{**} = \frac{\gamma R_0 N_0}{\alpha_X}\left(\beta - c\frac{(1-\beta)}{Y_0\alpha_Y}\right), \tag{11}$$

$$Y^{**} = Y_0 , \tag{12}$$

$$N^{**} = \gamma R_0 N_0 \frac{(1-\beta)}{Y_0\alpha_Y} . \tag{13}$$

Условия существования государства следуют из условий $X^{**} > 0$, $N^{**} > N_0$, то есть:

$$\frac{Y_0\alpha_Y}{c}\frac{\beta}{1-\beta}>1, \tag{14}$$

$$\frac{\gamma R_0}{Y_0\alpha_Y}(1-\beta)>1, \tag{15}$$

откуда:

$$\frac{c}{Y_0\alpha_Y+c}<\beta<1-\frac{Y_0\alpha_Y}{\gamma R_0}. \tag{16}$$

Результаты соответствующих расчетов представлены на Рис. 3.

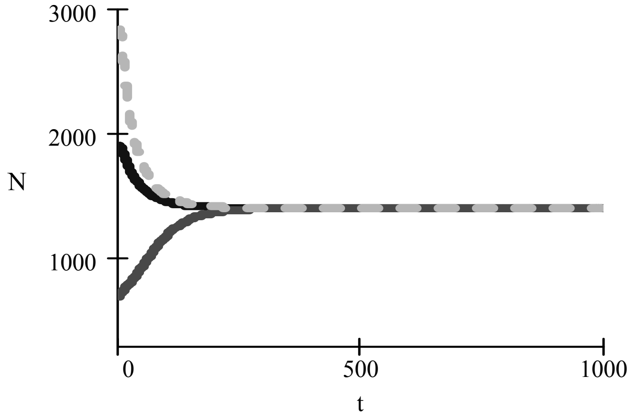


Рис. 3. Изменение численности населения *N(t)* при различных начальных значениях

Итак, государство имеет возможность изменять ставку налога β в интервале от $\frac{c}{Y_0\alpha_Y+c}$ до $1-\frac{Y_0\alpha_Y}{\gamma R_0}$, причем нижняя граница интервала соответствует меньшим значениям X^{**} и большим значениям N^{**} и наоборот, верхняя граница – большим значениям X^{**} и меньшим N^{**}.

4. Демографические циклы

Учтем то, что производительность труда γ, вообще говоря, не является постоянной величиной и, в частности, зависит от материальных возможностей земледельцев Y и влияния государства на хозяйственные процессы (что в рамках используемой модели должно выражаться в зависимости γ от X). При этом в странах так называемого восточного типа γ гораздо более зависит от X, чем от Y, а в странах Запада – наоборот. Можно считать, что для Востока $\gamma = \gamma(X)$, для Запада $\gamma = \gamma(Y)$. Если в обществе есть демографический отток и идет постепенный рост γ, то это стабилизирует ситуацию и точка равновесия начинает дрейфовать.

Рассмотрим случай $\gamma = \gamma(X)$, характерный для стран Востока. Если государство слабое ($X < X_1$), то оно не влияет на экономику, и γ определяется лишь возможностями земледельцев ($\gamma = \gamma_1$). При повышении X выше некоторого порога ($X > X_1$) государство имеет возможность расходовать часть своих ресурсов на проведение мелиоративных работ, строительство каналов и т. п., что в конечном итоге приводит к увеличению средней производительности труда до $\gamma = \gamma_2$. В соответствии с этим можно принять, что зависимость производительности труда от X имеет следующий вид:

$$\gamma(X)=\begin{cases}\gamma_1,\ 0<X\le X_1\\ \dfrac{\gamma_2-\gamma_1}{X_2-X_1}X+\dfrac{\gamma_1X_2-\gamma_2X_1}{X_2-X_1},\ X_1<X<X_2\ .\\ \gamma_2,\ X\ge X_2\end{cases} \tag{17}$$

Демографический коэффициент r и коэффициент c, отражающий величину затрат государства на управление, также не являются постоянными величинами и зависят от состояния общества. Будем считать, что если средние материальные накопления земледельцев больше прожиточного минимума ($Y > Y_0$), то в обществе сохраняется социальная стабильность и коэффициенты r и c принимают значения r_2 и c_1. При $Y < Y_0$ в обществе возникает кризисная ситуация, и демографический коэффициент r должен учитывать скорость аномальной убыли населения вследствие гражданских войн, эпидемий, массового голода и т. п. ($r = r_3 > r_2$), соответственно коэффициент c должен учитывать усиление неповиновения и сопротивления крестьян землевладельцам ($c = c_2 > c_1$). В соответствии с этим демографический коэффициент r можно представить в виде:

$$r(Y)=\begin{cases}r_2,\ Y>Y_0\\ r_3,\ Y<Y_0\end{cases}\ , \tag{18}$$

$$c(Y)=\begin{cases}c_1,\ Y>Y_0\\ c_2,\ Y<Y_0\end{cases}\ , \tag{19}$$

где $r_3 > r_2,\ \ c_2 > c_1$.

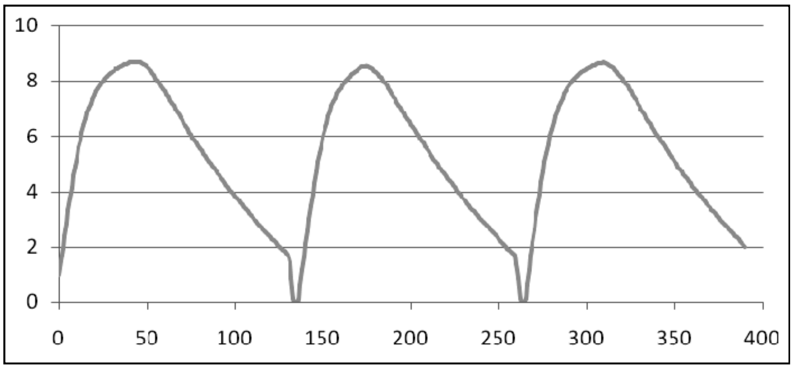
Также нужно учесть миграционные процессы, в частности тот факт, что в эпохи демографического сжатия сельское население начинает активно переезжать в города. Если принять, что в города ежегодно мигрирует доля r_1 сельского населения, то система уравнений (1) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \beta\gamma(X)R(N)N - \alpha_X X - c(Y)N\dfrac{Y_0}{Y} \\ \dfrac{dY}{dt} = \gamma(X)R(N) - \alpha_Y Y - \beta\gamma(X)R(N) \\ \dfrac{dN}{dt} = r(Y)N(1-\dfrac{Y_0}{Y}) - r_1 N \end{cases} . \quad (20)$$

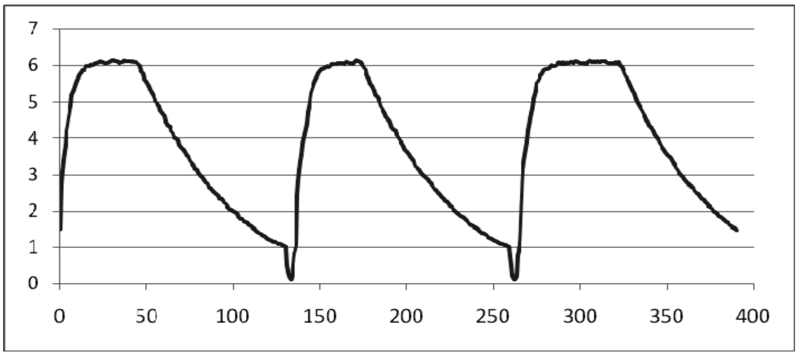
Результаты численного моделирования показывают, что при определенном соотношении параметров социальная система, описываемая уравнениями (20), становится неустойчивой и переходит в колебательный режим. Это означает, что в ней возникают социально-демографические циклы.

На Рис. 4 представлены типовые результаты расчетов по модели (20) с учетом зависимости $\gamma = \gamma(X)$ в соответствии с (17) в отсутствие миграции в города, то есть $r_1 = 0$. Считается, что снабжение городов продуктами питания осуществляется за счет рыночного сектора экономики, а в сельской местности преобладает натуральное хозяйство. Насколько рыночный сектор способен прокормить растущее городское население в период демографического сжатия – особый вопрос, выходящий за рамки настоящего исследования (этот вопрос рассматривается, например, в: Гринин и др. 2008; 2009).

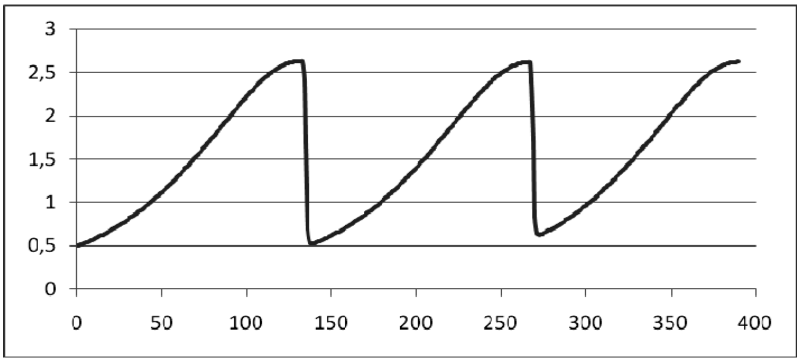
Видно, что периоды относительной стабильности периодически сменяются социально-демографическими кризисами, характеризующимися депопуляцией, экономическим коллапсом, резким ослаблением государства. Такая динамика была характерна для многих государств древности. Наиболее ярким примером циклического развития является история Китая начиная со времени образования в нем империи в III в. до н. э. На Рис. 5 приведены результаты моделирования демографической динамики в Китае в эпоху Мин (точки – исторические данные [Коротаев, Малков, Халтурина 2007], гладкая кривая – расчет по модели).



(а)



(б)



(в)

Рис. 4. Циклическая динамика изменения *X* (а), *Y* (б) и *N* (в) (по оси абсцисс – время в годах, значения по оси ординат – в относительных единицах)

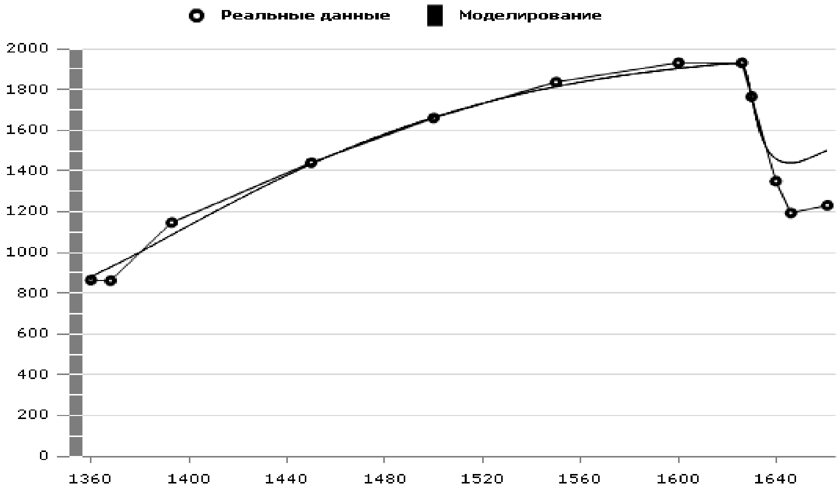
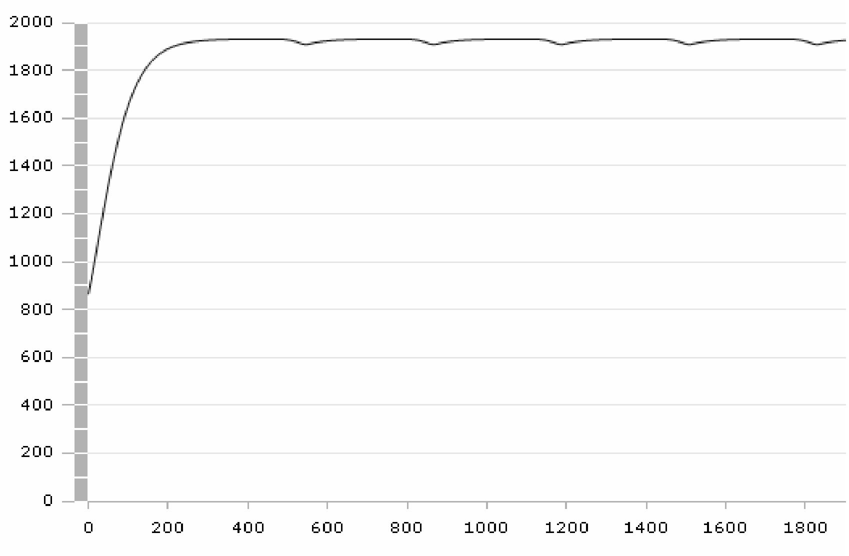


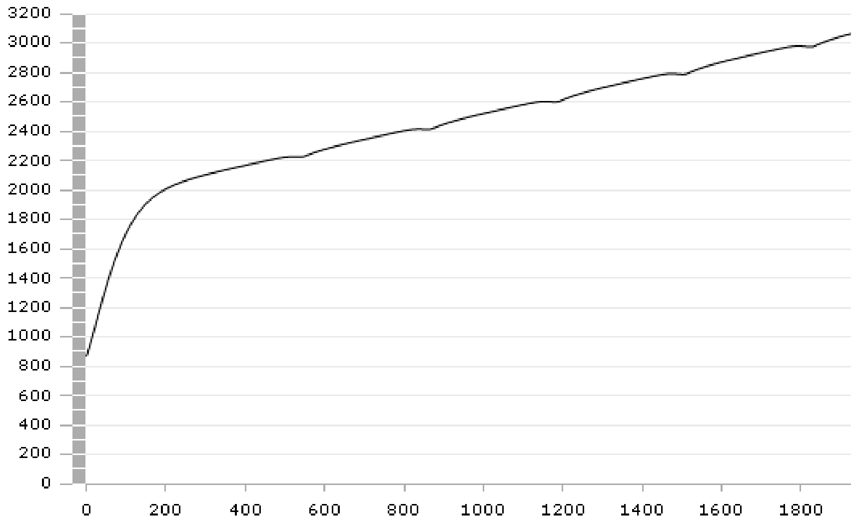
Рис. 5. Моделирование демографической динамики *N(t)* в Китае в эпоху Мин (по оси абсцисс – годы; по оси ординат – численность населения в относительных единицах, одно деление соответствует 74 360 человекам)

Видно, что соответствие расчетных и реальных данных достаточно хорошее.

Расчеты по модели показывают, что отток населения в города стабилизирует демографическую ситуацию в сельской местности. На Рис. 6 приведены результаты расчетов демографической динамики сельского населения (а) и общего населения (городского и сельского вместе) (б) при наличии оттока в города на уровне 0,03 % в год при тех же параметрах, при которых рассчитывались графики на Рис. 5.



(а)



(б)

Рис. 6. Результаты расчета динамики сельского населения (а) и общего населения (вместе с городским) (б) при наличии оттока сельского населения в города

Видно, что демографические циклы прекращаются и начинается непрерывный демографический рост (при условии, что одновременно растет производительность труда в сельском хозяйстве [Гринин, Коротаев, Малков 2008; Гринин и др. 2009]). Такая ситуация впервые реализовалась в Англии в XVIII в. (Рис. 7, данные из: Нефедов 2005) и далее в течение XIX в. стала характерна для многих стран мира.

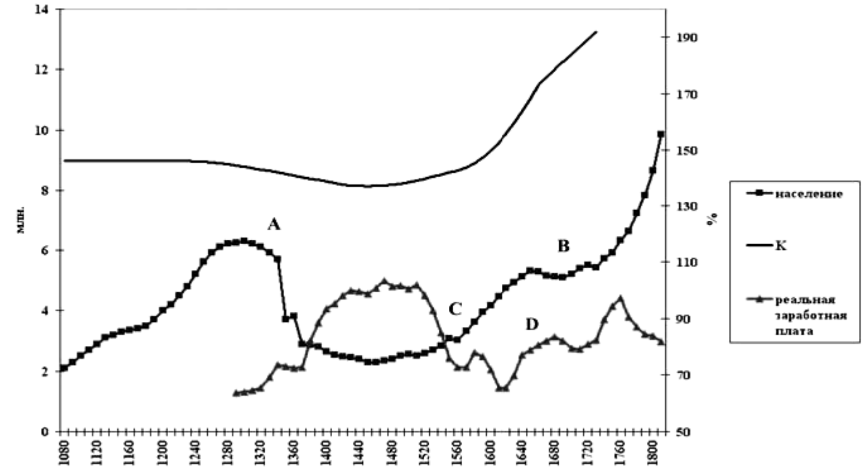


Рис. 7. Численность населения и уровень потребления в Англии XII–XVIII вв. (K – демографическая емкость территории) (Нефедов 2005)

Таким образом, разработанная модель может быть использована не только для анализа демографических циклов, но и при исследовании условий выхода аграрного общества из мальтузианской ловушки и перехода демографической динамики на траекторию демографического роста.

Библиография

Гринин Л. Е., Коротаев А. В., Малков С. Ю. 2008. Математические модели социально-демографических циклов и выхода из «мальтузианской ловушки»: некоторые возможные направления дальнейшего развития. *Проблемы математической истории: Математическое моделирование исторических процессов* / Отв. ред. Г. Г. Малинецкий, А. В. Коротаев, с. 78–117. М.: ЛИБРОКОМ.

Гринин Л. Е., Малков С. Ю., Гусев В. А., Коротаев А. В. 2009. Некоторые возможные направления развития теории социально-демографических циклов и математические модели выхода из мальтузианской ловушки. *История и Математика: процессы и модели* / Ред. С. Ю. Малков, Л. Е. Гринин, А. В. Коротаев, с. 134–210. М.: ЛИБРОКОМ/URSS.

Коротаев А. В., Малков А. С., Халтурина Д. А. 2007. *Законы истории: Математическое моделирование развития Мир-Системы. Демография, экономика, культура* / Отв. ред. Н. Н. Крадин. М.: КомКнига.

Малков С. Ю. 2009. *Социальная самоорганизация и исторический процесс: Возможности математического моделирования.* М.: ЛИБРОКОМ.

Малков С. Ю., Коссе Ю. В., Бакулин В. Н., Сергеев А. В. 2002. Социально-экономическая и демографическая динамика в аграрных обществах. *Математическое моделирование* 14(9): 103–108.

Нефедов С. А. 2002. Опыт моделирования демографического цикла. *Информационный бюллетень ассоциации «История и компьютер»* 29: 131–142.

Нефедов С. А. 2003. Теория демографических циклов и социальная эволюция древних и средневековых обществ Востока. *Восток* 3: 5–22.

Нефедов С. А. 2005. *Демографически-структурный анализ социально-экономической истории России.* Екатеринбург: Изд-во УГГУ.

Нефедов С. А., Турчин П. В. 2006. Опыт моделирования демографически-структурных циклов. *История и Математика: Макроисторическая динамика общества и государства* / Отв. ред. Л. Е. Гринин, А. В. Коротаев, С. Ю. Малков, с. 153–167. М.: КомКнига.

Турчин П. В. 2007. *Историческая динамика. На пути к теоретической истории.* М.: ЛКИ.

Artzrouni M., Komlos J. 1985. Population Growth through History and the Escape from the Malthusian Trap: A Homeostatic Simulation Model. *Genus* 41(3–4): 21–39.

Kögel T., Prskawetz A. 2001. Agricultural Productivity Growth and Escape from the Malthusian Trap. *Journal of Economic Growth* 6: 337–357.

Komlos J., Artzrouni M. 1990. Mathematical Investigations of the Escape from the Malthusian Trap. *Mathematical Population Studies* 2: 269–287.