
А. В. КОРОТАЕВ, А. С. МАЛКОВ,
Д. А. ХАЛТУРИНА

**КОМПАКТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
МАКРОМОДЕЛЬ
ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО
И ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ
МИР-СИСТЕМЫ (1–1973 гг.).
ОБОСНОВАНИЕ**

Мы хотим предложить исключительно простую математическую модель, описывающую как демографическое, так и экономическое развитие Мир-Системы вплоть до 1973 г. на основе тех же самых допущений, что уже были сделаны М. Кремером (Cremer 1993)¹.

Кремер предполагает наличие следующего соотношения между ВВП на душу населения и темпами демографического роста (см. диаграмму 1, с. 20).

Отметим, что подобное соотношение подразумевает, что при низких значениях ВВП на душу населения влияние этой переменной на темпы демографического роста может быть описано при помощи следующего уравнения:

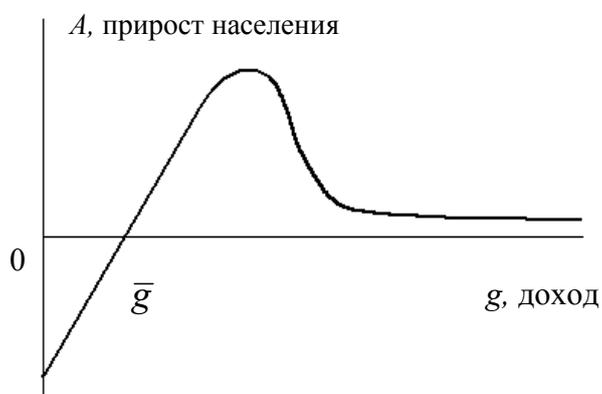
$$\frac{dN}{dt} = aSN, \quad (17)^2$$

где N – это население Земли, а S – «избыточный» продукт, производимый на одного человека сверх продукта m , минимально необходимого для простого (с нулевой скоростью роста) воспроизводства населения.

¹ Подробный анализ модели М. Кремера дается в нашей монографии (Коротаев, Малков, Халтурина 2007).

² Уравнения (1)–(16) см. в нашей статье (Коротаев, Малков, Халтурина 2005).

**Зависимость относительных темпов роста населения
от доходов в модели М. Кремера**



A – разница между рождаемостью и смертностью как функция от g – дохода на душу населения, который в модели рассчитывается как $g = G/N$, то есть общий продукт G , полученный по формуле (10) и поделенный между N членами популяции.

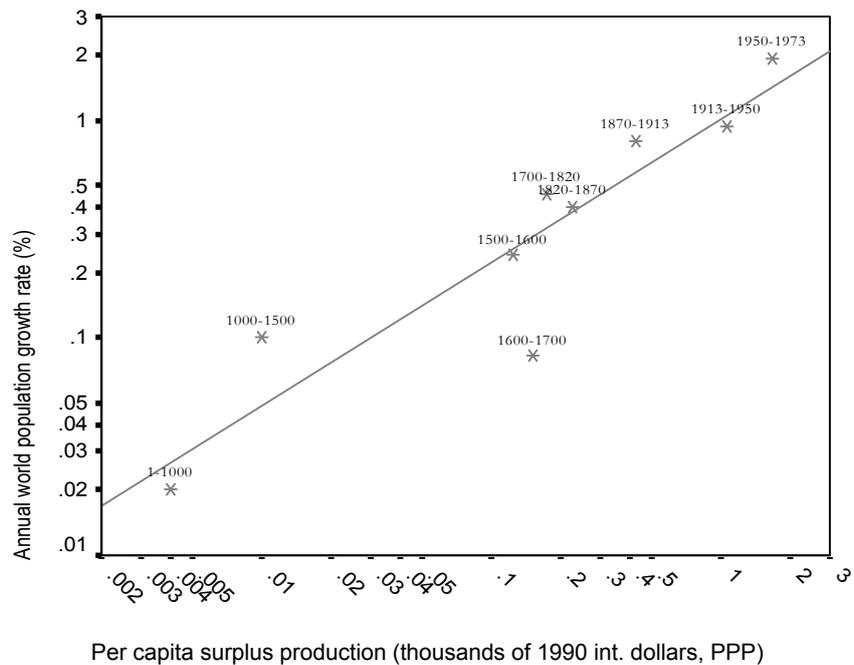
Отметим, что эта предельно простая модель генерирует определенное число гипотез, вполне поддающихся эмпирической проверке. Например, согласно этой модели относительные темпы роста населения мира $\left(r_N = \frac{dN}{dt} : N \right)$ должны быть линейно пропорциональны среднему душевому производству избыточного продукта:

$$r_N = aS. \quad (18)$$

Эмпирическая проверка данной гипотезы ее подтвердила, соответствующая корреляция оказалась в предсказанном направлении, очень сильной ($R = 0,961$) и, вне всякого сомнения, статистически значимой ($\alpha = 0,00004$) (см. диаграмму 2, с. 21).

Диаграмма 2

Корреляция между производством избыточного продукта на душу населения (ось абсцисс, логарифмический масштаб, в тысячах международных долларов 1990 г. в паритетах покупательной способности) и относительными темпами роста населения мира (ось ординат, логарифмический масштаб, %) для 1–1973 гг. (диаграмма рассеивания с наложенной линией регрессии)



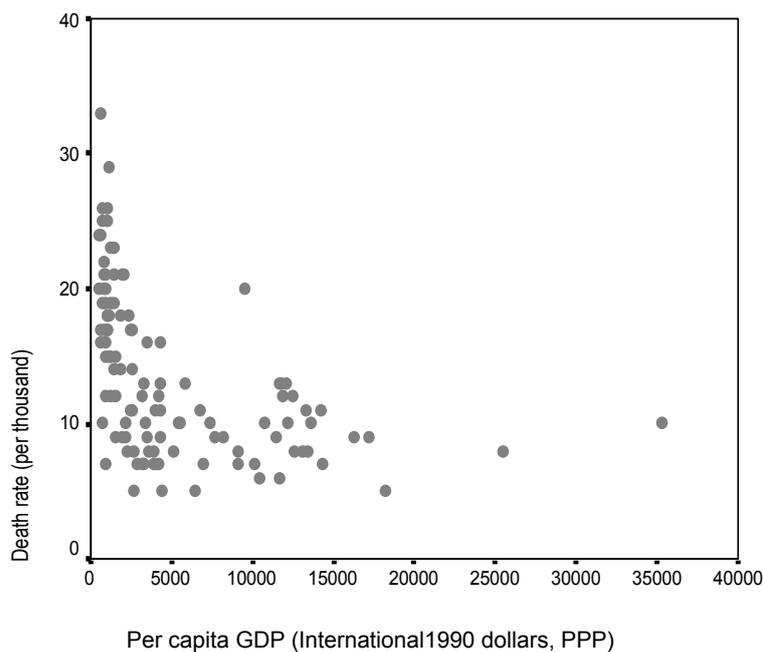
Примечание: $R = 0,961$, $\alpha = 0,00004$. Источник данных – Maddison 2001: 241, 264; данные по производству мирового ВВП на душу населения на 1000 г. скорректированы по В. А. Мельянцеву (1996; 2003; 2004; Meliantsev 2004). Величины S подсчитаны исходя из оценки m в

440 международных долларов 1990 г. в паритетах покупательной способности; обоснование этой оценки см. в: Коротаев и др. 2007: 38–74.

Механизмы данного соотношения вполне очевидны. В промежутке \$440–3500³ рост производства ВВП на душу населения ведет к относительно очень значительному улучшению питания, медицинского обслуживания, санитарных условий и т. д., что приводит к обвальному падению смертности (см. диаграмму 3):

Диаграмма 3

**Корреляция между производством ВВП на душу населения
(ось абсцисс) и смертностью
(ось ординат, на тысячу чел.) для стран мира на 1975 г.**



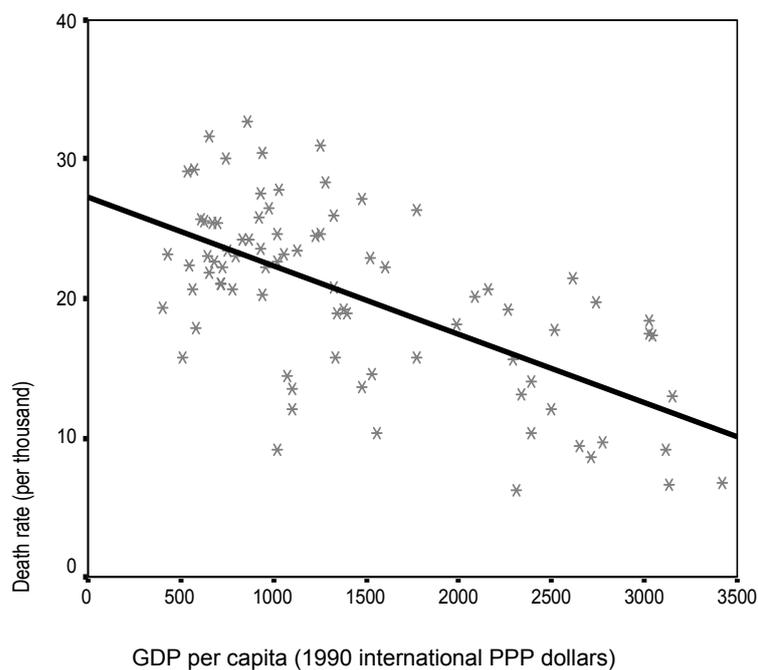
³ Здесь и далее (если не указано иначе) ВВП измеряется (вслед за Maddison 2001) в международных долларах 1990 г. в паритетах покупательной способности.

Примечание: источники данных – Maddison 2001 (ВВП), World Bank 2004 (смертность).

Например, по данным на 1960 г. корреляция между производством ВВП на душу населения и общим коэффициентом смертности для отрезка \$440–3500 достигает $-0,634$ ($\alpha = 0,0000000001$) (см. диаграмму 4):

Диаграмма 4

Корреляция между производством ВВП на душу населения (ось абсцисс) и смертностью (ось ординат, на тысячу чел.) для стран мира на 1960 г. (для участка \$440–3500)

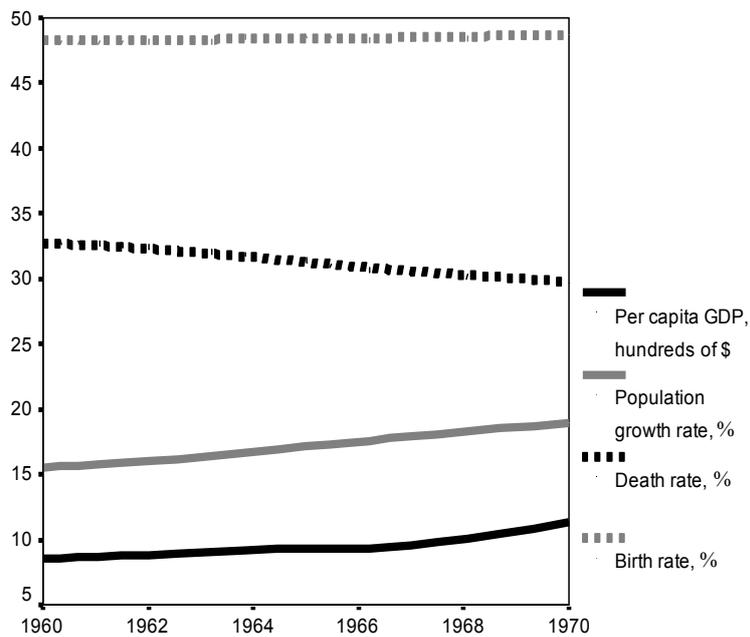


Примечание: $R = -0,634$, $\alpha = 0,0000000001$. Источники данных – Maddison 2001 (ВВП), World Bank 2004 (смертность).

Стоит отметить, что на самых ранних стадиях демографического перехода (коррелирующих как раз с рассматриваемым здесь участком экономического роста) сокращение смертности не сопровождается соответствующим сокращением рождаемости (см., например: Chesnais 1992); собственно говоря, рождаемость при этом может даже несколько вырасти (см., например, диаграмму 5):

Диаграмма 5

**Экономическая и демографическая динамика
в Сьерра-Леоне, 1960–1970 гг.**



Примечание: Сплошная черная линия – ВВП на душу населения (в сотнях \$). Сплошная серая линия – естественный прирост населения (в %). Черная пунктирная линия – общий коэффициент смертности (в %). Серая пунктирная линия – общий коэффициент рождаемости (в %). Ис-

точники данных – Maddison 2001 (ВВП), World Bank 2004 (демографические переменные).

Действительно, например, падение смертности с 50 до 25 % означает рост ожидаемой продолжительности жизни с 20 до 40 лет, в то время как женщина за 40 лет своей жизни может родить значительно больше детей, чем если она умрет в 20 лет. Во многих странах рост рождаемости на рассматриваемом участке был также связан с сокращением временного промежутка между рождениями (в связи с такими обусловленными модернизацией процессами, как сокращение продолжительности периодов табуирования сексуальных отношений между супругами после рождения ребенка или полное исчезновение подобных табу, а также уменьшение периода кормления грудью в связи с ростом доступности таких продуктов питания, которые могут выступать как замена материнского молока⁴). В подобном контексте радикальное падение смертности на ранних стадиях демографического перехода сопровождается столь же радикальным увеличением темпов демографического роста.

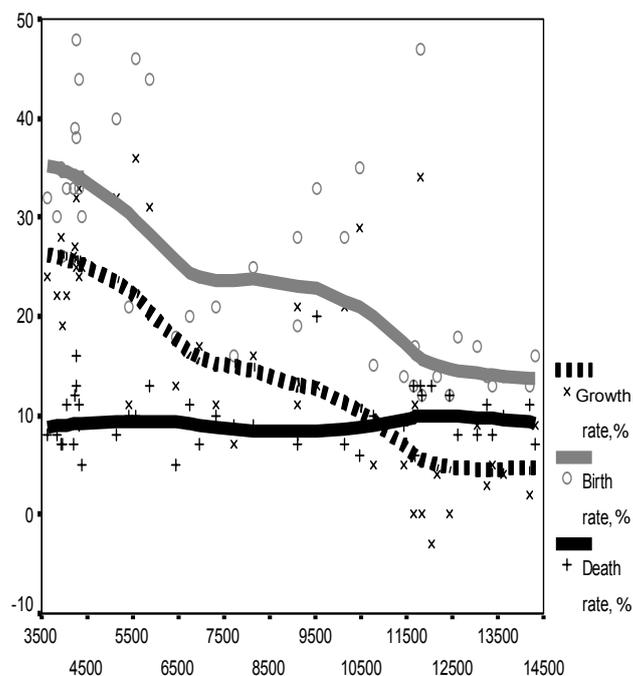
Необходимо подчеркнуть, что уравнение (17) не работает для участка ВВП на душу населения $> \$3500$. На этом «постмальтузианском» участке смертность быстро достигает своих предельно минимальных значений, а затем начинает медленно, но неуклонно расти из-за эффекта старения населения, в то время как рост таких переменных, как образование (и в особенности женское образование), уровень развития систем социального образования или доступность и совершенность методов и средств планирования семьи, ведет к относительно быстрому падению рождаемости (см., например: Hollingsworth 1996; McMichael 2001; Bongaarts 2003; Коротаев и др. 2005). В результате на этом участке дальнейший рост производства ВВП на душу населения ведет не к увеличению, а к самому

⁴ Отметим, что на этом этапе речь идет не столько о специальном детском питании промышленного производства, сколько о разного рода кашах домашнего приготовления.

существенному уменьшению темпов роста населения (см. диаграмму 6, с. 26).

Диаграмма 6

Соотношение между производством ВВП на душу населения (ось абсцисс), смертностью (% , ось ординат), рождаемостью (% , ось ординат) и естественным приростом населения (% , ось ординат)



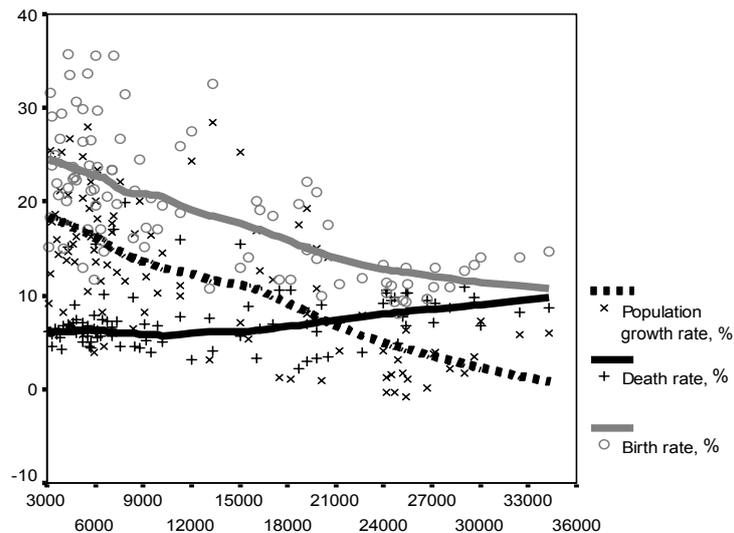
Примечание: для стран с производством ВВП на душу населения > \$3500, 1975 г., диаграмма рассеивания с наложенными линиями Лоуесса. Источники данных – Maddison 2001 (ВВП), World Bank 2004 (демографические переменные).

Данная картина выглядит еще более отчетливо для стран мира на 2001 г., так как между 1975 и 2001 гг. число стран, окончательно вышедших из первой фазы демографического перехода в «пост-

мальтузианский» мир, значительно выросло (а на первой фазе осталось лишь меньшинство стран) (см., например, диаграмму 7, с. 27).

Диаграмма 7

Соотношение между производством ВВП на душу населения (в международных долларах 2001 г. в паритетах покупательной способности, ось абсцисс), смертностью (% , ось ординат), рождаемостью (% , ось ординат) и естественным приростом населения (% , ось ординат), страны с производством ВВП на душу населения > \$3000 на 2001 г., диаграмма рассеивания с наложенными линиями Лоуесса⁵



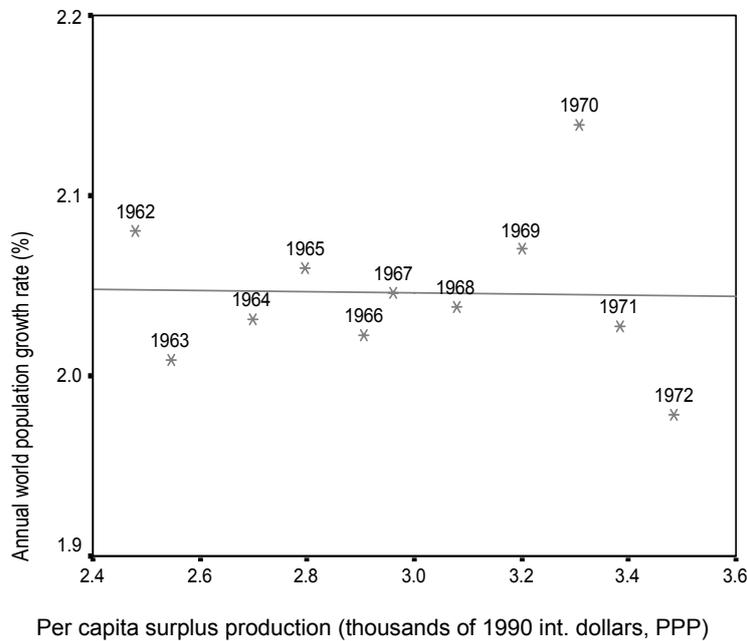
Примечание: источник данных – World Bank 2004.

⁵ Эта диаграмма не учитывает данные по постсоциалистическим странам европейской части бывшего Советского Союза (включая Российскую Федерацию) и близким к ним государствам Восточной Европы, имеющим очень специфический характер демографического роста (или, точнее сказать, демографического упадка – см., например: Коротаев и др. 2005: 302–329).

Достаточно примечательным здесь представляется и то обстоятельство, что как только мировое производство ВВП на душу населения приблизилось к \$3000 и превысило этот уровень (то есть при $S \sim \$2500$), положительная корреляция между S и r сначала упала до нулевого уровня (см. диаграмму 8); при $S > 3300$ ($g > 3700$) мы наблюдаем уже сильную отрицательную корреляцию (см. диаграмму 9, с. 29), а при $S > 4800$ ($g > 5200$) сила этой отрицательной корреляции начинает приближаться к своему максимальному значению (см. диаграмму 10, с. 30).

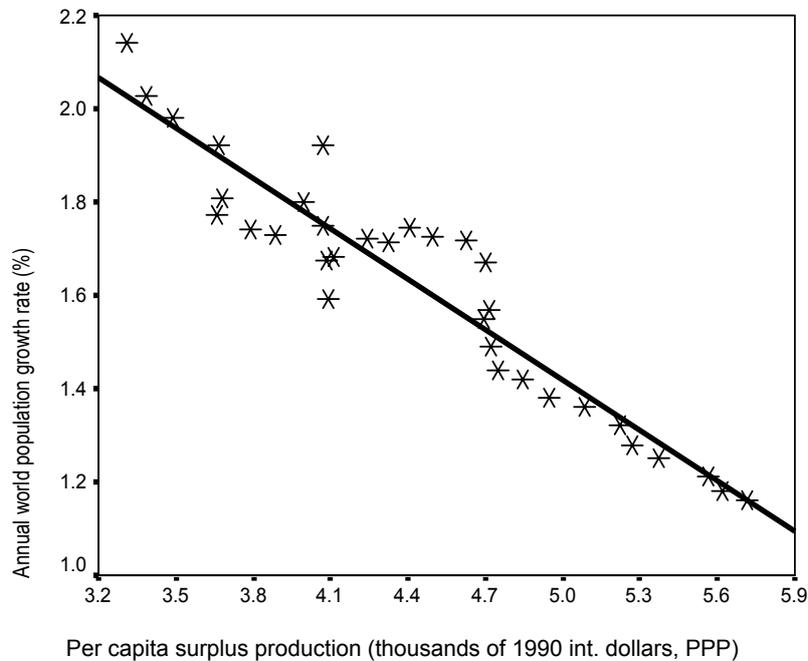
Диаграмма 8

**Корреляция между производством ВВП на душу населения
(в тысячах \$, ось абсцисс)
и темпами роста населения (% , ось ординат)
для отрезка $\$2400 < S < \3500
(диаграмма рассеивания с наложенной линией регрессии)**



Примечания: $R = -0,028$, $\alpha = 0,936$. Источник данных – Maddison 2001.

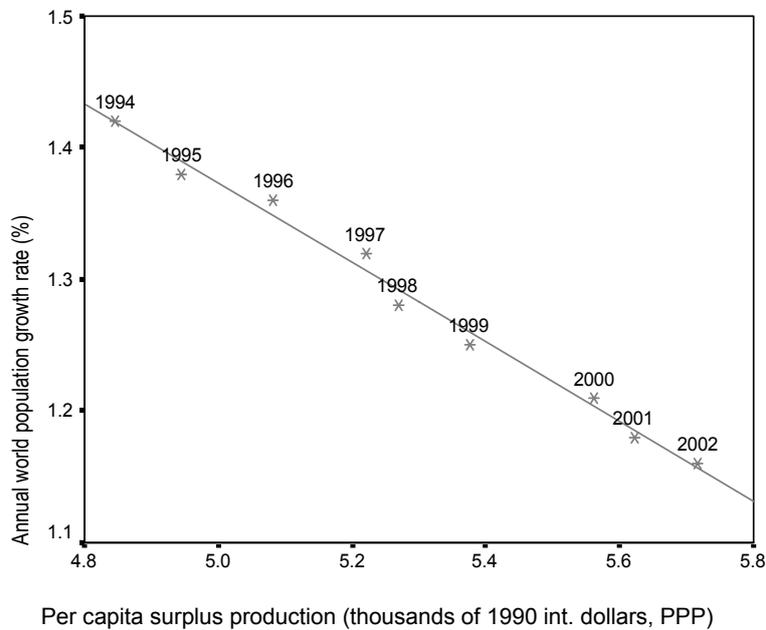
**Корреляция между производством ВВП
на душу населения (в тысячах \$, ось абсцисс)
и темпами роста населения (% , ось ординат)
для участка $S > \$3500$ (диаграмма рассеивания
с наложенной линией регрессии)**



Примечания: $R = -0,946$, $\alpha = 0,0000000000000003$. Источники данных – Maddison 2001 (мировой ВВП на душу населения, 1970–1998 гг., и темпы роста населения мира, 1970–1988 гг.); World Bank 2004 (мировой ВВП на душу населения, 1999–2002 гг.); US Census Bureau 2005 (темпы роста населения мира, 1989–2002 гг.).

Диаграмма 10

Корреляция между производством ВВП на душу населения (в тысячах \$, ось абсцисс) и темпами роста населения (% , ось ординат) для участка $S > \$4800$ (диаграмма рассеивания с наложенной линией регрессии)



Примечания: $R = -0,995$, $\alpha = 0,00000004$. Источники данных – Maddison 2001 (мировой ВВП на душу населения, 1994–1998 гг.); World Bank 2004 (мировой ВВП на душу населения, 1999–2002 гг.); US Census Bureau 2005 (темпы роста населения мира).

Таким образом, для описания соотношения между экономическим и демографическим ростом на «постмальтузианском» этапе экономической истории (то есть для подушевого ВВП > \$3000) уравнение (17) должно быть модифицировано, что вполне возмож-

но (Коротаев и др. 2005), но что выходит за рамки данной статьи, нацеленной на описание экономической и демографической макродинамики «мальтузианского» периода человеческой истории.

* * *

Как уже было замечено Кремером (Kremer 1993: 694), в сочетании с уравнением (10) уравнения типа (17) «при отсутствии технологического роста (то есть при $T = \text{const}$) описывают чисто мальтузианскую систему, генерируя динамику, сходную с логистическими кривыми, которые биологи используют для описания популяционной динамики животных» (а мы бы к биологам добавили еще и клиометристов, моделирующих доиндустриальные политико-демографические циклы [см., например: Нефедов 2000; 2001; 2002а; 2002б; 2003; Nefedov 2004; Turchin 2003; Коротаев и др. 2005]).

При постоянных относительных темпах технологического роста $\left(\frac{T}{T} = r_T = \text{const}\right)$ в рамках этой модели, объединяющей уравнения (9) и (17), мы будем асимптотически иметь как постоянные темпы относительного роста населения $\left(\frac{N}{N} = r_N = \text{const}\right)$ и, таким образом, население будет в соответствии с тенденцией расти экспоненциально, так и постоянный S . Отметим также, что чем большее значение r_T мы возьмем, тем большее значение S мы получим.

Покажем это формально.

Возьмем следующую систему:

$$G = gTN^a \quad (10)$$

$$\frac{dN}{dt} = aSN \quad (17)$$

$$\frac{dT}{dt} = cT, \quad (18)$$

где $S = \frac{G}{N} - m$.

Уравнение (18) очевидным образом дает $T = T_0 e^{ct}$.

Таким образом, $G = gT_0 e^{ct} N^\alpha$, а следовательно,

$$\frac{dN}{dt} = a \left(\frac{gT_0 e^{ct} N^\alpha}{N} - m \right) N = agT_0 e^{ct} N^\alpha - amN .$$

Это уравнение известно как уравнение Бернулли:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x)y^\alpha, \text{ которое имеет следующее решение:}$$

$$y^{1-\alpha} = Ce^{F(x)} + (1-\alpha)e^{F(x)} \int e^{-F(x)} g(x) dx ,$$

где $F(x) = (1-\alpha) \int f(x) dx$, а C – константа.

В рассмотренном выше случае мы имеем

$$N^{1-\alpha} = Ce^{F(t)} + (1-\alpha)e^{F(t)} \int e^{-F(t)} agT_0 e^{ct} dt ,$$

где $F(t) = (1-\alpha) \int (-am) dt = (\alpha-1)amt$.

Таким образом,

$$N^{1-\alpha} = Ce^{(\alpha-1)amt} + (1-\alpha)agT_0 e^{(\alpha-1)amt} \int e^{-(\alpha-1)amt} e^{ct} dt$$

$$N^{1-\alpha} = e^{-(1-\alpha)amt} \left(C + (1-\alpha)agT_0 \int e^{(c+(1-\alpha)am)t} dt \right)$$

$$N^{1-\alpha} = e^{-(1-\alpha)amt} \left(C + \frac{(1-\alpha)agT_0}{c + (1-\alpha)am} e^{(c+(1-\alpha)am)t} \right).$$

В результате мы получаем следующее уравнение для S :

$$S = \frac{gT_0 e^{ct} N^\alpha}{N} - m = gT_0 e^{ct} N^{\alpha-1} - m = \frac{gT_0 e^{(c+(1-\alpha)am)t}}{C + \frac{(1-\alpha)agT_0}{c + (1-\alpha)am} e^{(c+(1-\alpha)am)t}} - m$$

$$S = \frac{1}{\frac{C}{gT_0} e^{-(c+(1-\alpha)am)t} + \frac{(1-\alpha)a}{c + (1-\alpha)am}} - m$$

Так как $c > 0$, а $(1-\alpha) > 0$, ясно, что $c + (1-\alpha)am > 0$.

Следовательно, $e^{-(c+(1-\alpha)am)t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Это значит, что $S \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{c + (1-\alpha)am}{(1-\alpha)a} - m$, или, наконец,

$$S \rightarrow \frac{c}{(1-\alpha)a} \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, в растущих «мальтузианских» системах S может рассматриваться как индикатор темпов технологического роста. Действительно, в мальтузианских системах при отсутствии технологического роста демографический рост ведет к тому, что S стремится к 0, в то время как систематическое производство S оказывается в долгосрочной перспективе возможным только при условии систематического технологического роста⁶.

Теперь заменим $\frac{T}{T} = r_T = const$ кремеровским уравнением технологического роста (14) и проанализируем полученную модель: $G = aTN^\alpha$,

$$G = aTN^\alpha, \quad (9)$$

$$\frac{dN}{dt} = bSN, \quad (17)$$

$$\frac{dT}{dt} = cNT \quad (14)$$

В этой модели вполне предсказуемым образом S может быть аппроксимировано как kr_T . С другой стороны, в рамках рассматриваемой модели r_T по определению прямо пропорционально N . Таким образом, эта модель генерирует не вполне самоочевидную (если только не сказать «не вполне правдоподобную») предикцию – что на протяжении «мальтузианско-кузнецовской» части человеческой истории мировое производство «избыточного» ВВП на душу населения должно было

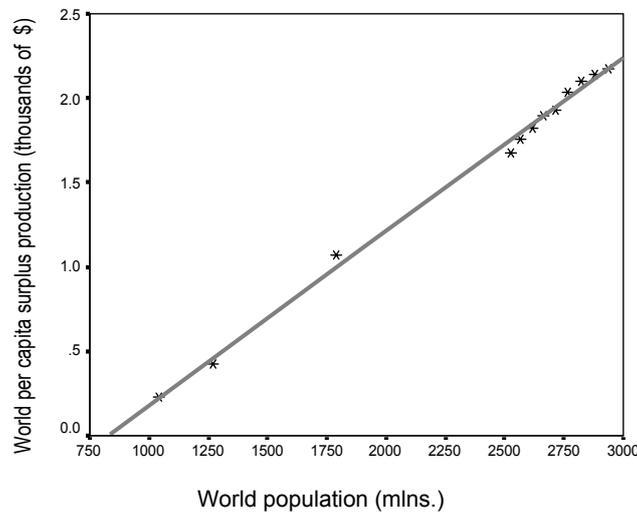
⁶ Подчеркнем, что речь идет именно о долгосрочной перспективе, ибо в более краткосрочной перспективе необходимо иметь в виду, что вполне регулярное производство S также наблюдалось и на фазах восстановительного роста доиндустриальных политико-демографических циклов (следовавших за фазами политико-демографического коллапса, в результате которого выжившая часть населения оказывалась обильно обеспеченной необходимыми ресурсами; собственно говоря, без регулярного производства S постколлапсные восстановления и не могли бы происходить). Однако после завершения фаз восстановительного роста дальнейшее производство значительных объемов S (а значит, и сохранение заметных темпов демографического роста) было возможно только при условии заметных темпов технологического роста (см., например: Коротав и др. 2005: 160–228). Отметим также, что S , производимый на начальных (восстановительных) фазах политико-демографических циклов, ни в какой степени не может объяснить тысячелетний тренд роста производства S , который наблюдался на протяжении многих веков еще до того, как большая часть населения мира перешла во вторую фазу демографического перехода (см., например: Maddison 2001), и который был обусловлен именно ускорением темпов технологического роста.

в соответствии с тенденцией быть прямо пропорционально численности населения мира. Данная гипотеза, конечно же, заслуживает того, чтобы быть эмпирически проверенной. Отметим сразу же, что наша эмпирическая проверка подтвердила обоснованность этой гипотезы.

Наша проверка для всего отрезка человеческой истории, для которого в нашем распоряжении имеются оценки и численности населения мира, и мирового производства ВВП (то есть для 1–2002 гг.⁷), дала следующие результаты: $R^2 = 0,98$, $\alpha < 10^{-16}$, в то время как для периода с наиболее ярко выраженной «мальтузианско-кузнецовской» динамикой (1820–1958 гг.) положительная корреляция между двумя рассматриваемыми переменными приближается к своему максимальному значению (см. диаграмму 11):

Диаграмма 11

**Корреляция между численностью населения мира
(ось абсцисс, в млн чел.) и производством
«избыточного» ВВП на душу населения
(ось ординат, в тыс. \$) (1820–1958 гг.)**



Примечание: $R^2 > 0,996$, $\alpha < 10^{-12}$.

⁷ Источники данных – Maddison 2001 (население мира и мировой ВВП, 1–1998 гг.), World Bank 2004 (мировой ВВП, 1999–2002 гг.), the US Census Bureau 2005 (население мира, 1999–2002 гг.).

Между прочим, так как в мальтузианско-кузнецянских системах S может быть аппроксимирован как kN , уравнение (17) может быть аппроксимировано как $dN/dt \sim k_1N^2$, или, естественно, как $dN/dt \sim N^2/C$; таким образом, уравнение Капицы оказывается одной из возможных форм аппроксимированной записи популяционной динамики в рассматриваемой модели.

Итак, мы получаем следующие предварительные результаты:

$$r_T = k_2N;$$

таким образом,

$$dS/dt \sim kr_T/dt = k_3dN/dt.$$

Это означает, что для «мальтузианско-кузнецянской» части человеческой истории dS/dt может быть аппроксимирована как k_4dN/dt .

С другой стороны, так как dN/dt в исходной модели равняется aSN , это, конечно, заставляет предполагать, что для соответствующей части человеческой истории как экономическая, так и демографическая динамика Мир-Системы может быть аппроксимирована при помощи следующей неожиданно простой математической модели⁸:

$$\frac{dN}{dt} = aSN, \quad (17)$$

$$\frac{dS}{dt} = bNS, \quad (19)$$

где N – это население Земли, а S – «избыточный» продукт, производимый при данном уровне технологического развития Мир-Системы на одного человека.

При этом для подсчета мирового ВВП (G) может быть использовано следующее уравнение:

$$G = mN + SN, \quad (20)$$

⁸ Стоит отметить, что данная модель описывает мальтузианско-кузнецянскую динамику только в динамически сбалансированном состоянии (когда наблюдаемая численность населения мира находится в сбалансированном соответствии наблюдаемому уровню технологического развития). Для описания ситуаций с N , диспропорционально низким или высоким по отношению к наблюдаемому уровню технологического развития (а значит, и с диспропорционально высоким или низким S), естественно, потребуется неаппроксимированный вариант модели [(10) – (17) – (13)]. Отметим, что в подобных случаях N будет расти ускоренными темпами или падать до уровня динамического технико-демографического равновесия, после чего траектория развития будет идти по модели (17) – (19).

где t представляет собой количество произведенного продукта на одного человека, минимально необходимое для простого (с нулевой скоростью роста) воспроизводства населения Мир-Системы.

В нашей следующей статье мы проведем эмпирическую проверку предлагаемой математической макромоделли.

Литература

Коротаев, А. В., Малков, А. С., Халтурина, Д. А.

2005. Математическая модель развития Мир-Системы (предварительный анализ). В: Малков, С. Ю., Коротаев, А. В. (ред.), *История и синергетика (2): Математическое моделирование социальной динамики* (с. 6–48). М.: УРСС/КомКнига.

2007. *Законы истории: Математическое моделирование развития Мир-Системы. Демография, экономика, культура*. М.: КомКнига/УРСС.

Мельянецов, В. А.

1996. *Восток и Запад во втором тысячелетии*. М.: МГУ.

2003. Три века российского экономического роста. *Общественные науки и современность* 5: 84–95.

2004. *Генезис современного (интенсивного) экономического роста*. М.: Гуманитарий.

Нефедов, С. А.

2000. О законах истории и математических моделях. *Известия Уральского государственного университета* 15: 15–23.

2001. Метод демографических циклов. *Уральский исторический вестник* 7: 93–107.

2002а. Опыт моделирования демографического цикла. *Информационный бюллетень ассоциации «История и компьютер»* 29: 131–142.

2002б. О теории демографических циклов. *Экономическая история* 8: 116–121.

2003. Теория демографических циклов и социальная эволюция древних и средневековых обществ Востока. *Восток* 3: 5–22.

Bongaarts, J. 2003. Completing the Fertility Transition in the Developing World: The Role of Educational Differences and Fertility Preferences. *Population Studies* 57: 321–335.

Chesnais, J. C. 1992. *The Demographic Transition: Stages, Patterns, and Economic Implications*. Oxford: Clarendon Press.

Hollingsworth, W. G. 1996. *Ending the Explosion: Population Policies and Ethics for a Humane Future*. Santa Ana, CA: Seven Locks Press.

Kremer, M. 1993. Population Growth and Technological Change: One Million B. C. to 1990. *The Quarterly Journal of Economics* 108: 681–716.

Maddison, A. 2001. *Monitoring the World Economy: A Millennial Perspective*. Paris: OECD.

McMichael, T. 2001. *Human Frontiers, Environments, and Disease. Past Patterns, Uncertain Futures*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Meliantsev, V. A. 2004. Russia's Comparative Economic Development in the Long Run. *Social Evolution & History* 3: 106–136.

Nefedov, S. A. 2004. A Model of Demographic Cycles in Traditional Societies: The Case of Ancient China. *Social Evolution & History* 3 (1): 69–80.

Turchin, P. 2003. *Historical Dynamics: Why States Rise and Fall*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

U. S. Bureau of the Census. 2005. *World Population Information* (<http://www.census.gov/ipc/www/world.html>).

World Bank. 2004. *World Development Indicators*. Washington, DC: World Bank.